Exercice 4

On considère les suite (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$I_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt$ et $J_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt$.

1°) a) Montrer que la suite (I_n) est à terme positifs.

b) Etudier la monotonie de la suite (I_n).

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

2°) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3°) a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel $n \in IN^*$,

$I_{n+1} = -(n+1)J_n + \sin(1)$

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

1°) a) Montrer que la suite (I_n) est à terme positifs.

ona $I_n = \int_0^1 t^n \cos(t) \, dt$

• $t \longmapsto t^n \cos(t)$ est continue sur $[0,1]$

or $0 \leq t \leq 1 < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos(t) > 0$ et $t^n \geqslant 0$

donc $\forall t \in [0,1]$, $t^n \cos(t) \geqslant 0$

Ainsi: $I_n = \int_0^1 t^n \cos(t) \, dt \geqslant 0$